

Varianta 99

Subiectul I

- a) $AB = 5\sqrt{2}$.
- b) $a = 10$ și $b = 10$.
- c) $S = \frac{15\sqrt{3}}{4}$.
- d) $\bar{z} = -4 + 9i$.
- e) $a = 1, b = -1$.
- f) $BC = \sqrt{73}$.

Subiectul II

1.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 20 \\ 2 & 30 \end{vmatrix} = -10$.

b) $p = \frac{2}{5}$.

c) $x = \frac{6}{5}$.

d) $x = 8^3$.

e) Prin algoritmul de împărțire, obținem restul $X + 1$.

2.

a) $f'(x) = -\frac{4}{x^5}, x \neq 0$.

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -4$.

c) $x = 0$ este asimptotă verticală.

d) $\int_1^2 f(x) dx = \frac{31}{24}$.

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n^2} = 1$.

Subiectul III

a) $f(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 3$. Dar $x \in \mathbf{N} \Rightarrow x = 3$.

b) $\det(A) = -6$.

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 16 & 15 \\ 20 & 21 \end{pmatrix}.$

d) $5A + 6I_2 = A^2.$

e) $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(20) = \sum_{k=1}^{20} f(k) = \sum_{k=1}^{20} (k^2 - 9) = \sum_{k=1}^{20} k^2 - \sum_{k=1}^{20} 9 =$
 $= \frac{20 \cdot (20+1)(2 \cdot 20 + 1)}{6} - 9 \cdot 20 = 2690.$

f) Inecuația devine $\frac{(x-4)(x+2)}{x} \geq 0$. Soluția este $x \in [-2, 0) \cup [4, \infty)$.

g) Din d) și folosind faptul că $A \cdot I_2 = I_2 \cdot A = A$ avem

$$A^4 = (5A + 6I_2)^2 = 125A + 150I_2 + 60A + 36I_2 = 185A + 186I_2.$$

Deci $p = 185$; $q = 186$.

Subiectul IV

a) $u'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+3)^2}, \forall x \in A.$

b) $f(x) \cdot u(x) = (x+1)(x+2)(x+3) \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} \right) =$
 $= (x+2)(x+3) + (x+1)(x+3) + (x+1)(x+2) = f'(x) = g(x).$

c) $u'(x) = -\left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} \right) < 0, \forall x \in A.$

d) Din punctul b) obținem $u(x) = \frac{g(x)}{f(x)}, \forall x \in A$. Atunci

$$u'(x) = \frac{g'(x)f(x) - f'(x)g(x)}{f^2(x)} = \frac{h(x)f(x) - g^2(x)}{f^2(x)}, x \in A.$$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0$, deci $y = 0$ este ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$

f) $\int_0^1 u(x) dx = \ln(x+1) \Big|_0^1 + \ln(x+2) \Big|_0^1 + \ln(x+3) \Big|_0^1 = \ln 4.$

g) Avem $\frac{f(x)h(x) - g^2(x)}{f^2(x)} = u'(x) < 0, \forall x \in A = \mathbf{R} - \{-1, -2, -3\}$, rezultă

$$f(x)h(x) - g^2(x) < 0, \forall x \in \mathbf{R} - \{-1, -2, -3\}. \quad (1)$$

Pentru $x = -1$: $f(-1)h(-1) - g^2(-1) = 0 - g^2(-1) < 0.$

$x = -2$: $f(-2)h(-2) - g^2(-2) = 0 - g^2(-2) < 0$. Analog pentru $x = 3$.

Folosind (1) rezultă că relația dată este adevărată pentru orice $x \in \mathbf{R}$.